Title	素体F={0,1}上の直交群の2元生成(半群・形式言語と計算機システム)
Author(s)	石橋, 宏行
Citation	数理解析研究所講究録 (1996), 960: 66-70
Issue Date	1996-08
URL	http://hdl.handle.net/2433/60508
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
960巻 1996年 66-70

素体F＝｛0，1｝上の直交群の2元生成

城西大学理学部　石橋宏行　（Hiroyuki Ishibashi）

F＝｛0，1｝は標数2の素体、VはF上n次のベクトル空間で2次写像　q：V ⟶ F　を付与されているものとする。即ちqはFの元aとVの元xとに対し、

（1）　$q(ax)=a^2q(x)$

を満たし、

（2）　$B(x,y)=q(x+y)-q(x)-q(y)$

と置けばBは対称双一次写像である。この様なVをF上の2次空間と言う。

2次空間V上の一般線型群GL(V)の部分群

$$O(V)=\{\sigma\in GL(V)\mid q(x)=q(\sigma x)\ \text{for all}\ x\ \text{in}\ V\}$$

をV上の直交群と言う。

我々の目的はO(V)の2元生成を示す事である。従って、G＝O(V)と置き、G＝<σ,ρ>　なるGの2元 σ,ρ の存在を示す。ただし、V

は非退化、即ち、

「ｘ≠０　ならば　Ｂ(ｘ，Ｖ)≠{０}」

と仮定する。又簡単のため、Ｂ(ｘ，ｙ)をｘｙで示す。

まずＶが非退化　なる仮定より

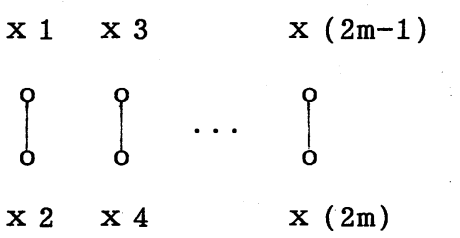
$$n = 2m$$

を得る。

証明の前にＶの２次空間としての構造をグラフを用いて表す事にする。即ちＶの元ｘはｑ(ｘ)＝０か≠０かにより　ｏ　か　●　かで示し，Ｖの２元ｘ、ｙはｘｙ＝０か≠０かにより——で結ばないか結ぶかで示す事にする。Ｆ＝{０，１}であるから、このＶのグラフは完全にｑを表現する。

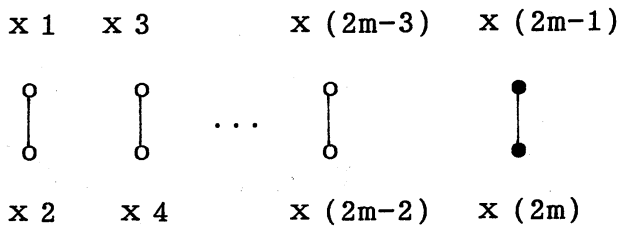
次にＶの基底Ｘ＝{ｘ１，ｘ２，...，ｘ(2m-1)，ｘ(2m)}を上手に選べばそのグラフは次のいずれかになる。

(i)



(双曲型)

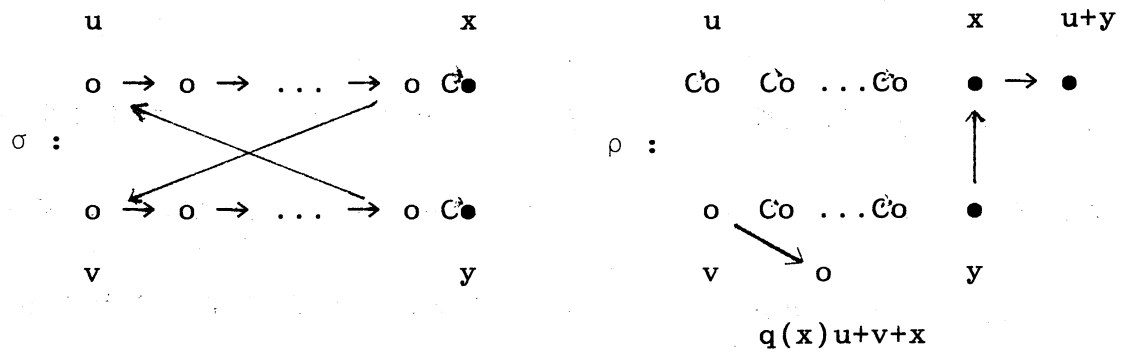
(ii)



(非双曲型)

Vが(i)双曲型の場合は既に証明されている(石橋[2])ので、Vが(ii)非双曲型の場合に証明すればよい訳であるが、ここで行う証明法は(i)、(ii)いずれの場合にも適用出来るものである。

さて、証明であるが、Gの元は線型写像であるから、Gの生成元 σ、ρはVの基底Xの上で定義すればよい。そこでu = x1、v = x2、x = x(2m-1)、y = x(2m)とおき



と定義すれば、明らかにσ, ρは基底Xの上でqを保存する。従って、これらをV上に線型に広げればσ, ρはGの元となる。ここでσ, ρのXに関する行列表示をそれぞれA, Bと書く事にし、F(h, k)を

$$F(1,2j-1) = \begin{pmatrix} A & B^{j-1} \\ & A^{-1} \end{pmatrix}^2$$

$$F(1,2j) = \begin{pmatrix} A & B^{m-2+j} \\ & A^{-1} \end{pmatrix}^2$$

$$F(2,2j-1) = \begin{pmatrix} A & B^{j-1} \\ & A^{-B^m} \end{pmatrix}^2$$

$$F(2,2j) = \begin{pmatrix} A & B^{m-2+j} \\ & A^{-B^m} \end{pmatrix}^2$$

と定義すれば、Gの任意の元πの行列表示Cに対し、F(h,k)CはCに次のi) - iv)の右辺の操作を施す事と同じであるから、

(i) $F(2j-1)C$ = [Cの1行にCの2j行を加え、 Cの(2j−1)行にCの2行を加える]

(ii) $F(2j-1)C$ = [Cの1行にCの(2j−1)行を加え、 Cの2j行にCの2行を加える]

(iii) $F(2j-1)C$ = [Cの2行にCの2j行を加え、 Cの(2j−1)行にCの1行を加える]

(iv) $F(2j-1)C$ = [Cの2行にCの(2j−1)行を加え、 Cの2j行にCの1行を加える]

行列の基本変換と同様F(h,k)をCの左から繰り返し掛ける事により、Cを単位行列に出来る。従ってGは σ,ρ で生成される。

参考文献

[1] H.Ishibashi and A.G.Earnest, Two-Element Generation of The Orthogonal Groups over Finite Fields, J.Algebra 165(1994), 164-171.

[2] H.Ishibash, Two-Element Generation of The Hyperbolic Orthogonal Groups over The Finite Fields F_2, 数理解析研究所講究録 910,半群.形式言語及び語の組み合わせ論シンポジウム (1995),36-39.

[3] H.Ishibashi, Two-Element Generation of The Integral Symplectic Group $Sp_n(Z)$, J.Algebra 179(1996), 137-144.